ALGEBRĂ VECTORIALĂ

(1) Fie vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ și $\vec{c} = -\vec{i} + 3\vec{j}$. Pentru ce valori ale lui $\lambda \in \mathbb{R}$ vectorii de mai jos sunt coliniari:

1) $\vec{p} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{c}$;

2) $\vec{p} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\vec{q} = \vec{c}$;

3) $\vec{p} = \vec{a} - \lambda\vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + \lambda\vec{c}$

Răspuns. 1) $\lambda = -\frac{3}{2}$; 2) $\lambda = -\frac{9}{14}$; 3) $\lambda = 0$, $\lambda = \frac{5}{7}$.

(2) În toate cazurile de mai jos se cunosc unghiurile α, β, γ pe care vectorul $\vec{a}$ le face cu versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ a reperului $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, precum și norma (lungimea) vectorului $\vec{a}$.

Să se determine coordonatele carteziene ale vectorului $\vec{a}$.

1) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$, $\|a\| = 4$;

2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$, $\|\vec{a}\| = 8$;

3) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{2\pi}{3}$, $\|\vec{a}\| = 2$;

4) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$, $\|\vec{a}\| = 6$.

Indicație. Scriem $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. Înmulțind scalar această egalitate cu versorul $\vec{i}$ al axei Ox, obținem $\vec{a}\cdot\vec{i} = a_1$. Dar $\vec{a}\cdot\vec{i} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{i}\|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}}) =$
$= \|\vec{a}\|\cos\alpha$. Prin urmare, $a_1 = \|\vec{a}\|\cos\alpha$. Analog

$a_2 = \|\vec{a}\| \cos\beta$ și $a_3 = \|\vec{a}\| \cos\gamma$. Rezultatele stabilite arată că, pentru un vector $\vec{a} \in V_3$, coordonatele carteziene sunt mărimile algebrice ale proiecțiilor ortogonale ale vectorului $\vec{a}$ pe respectiv cele trei axe de coordonate ale reperului $\mathcal{R}$, adică Ox, Oy și Oz.

Răspuns. 1) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\sqrt{2}\vec{j} + 2\vec{k}$;

2) $\vec{a} = -4\sqrt{2}\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$;

3) $\vec{a} = -\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} - \vec{k}$;

4) $\vec{a} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\sqrt{2}\vec{k}$.

(3) Se știe că: $\|\vec{a}\| = 2$; $\|\vec{b}\| = 5$; $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.
Să se calculeze:
$\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\|\vec{a}\|^2$; $\|\vec{b}\|^2$; $(\vec{a} + \vec{b})^2$; $(2\vec{a} - 3\vec{b})(3\vec{a} + 4\vec{b})$.

Răspuns. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$; $\|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2} = 4$; $\vec{b}^{\,2} = 25$
$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = 39$; $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (3\vec{a} + 4\vec{b}) = -281$.

(4) Să se găsească unghiul vectorilor $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ și $\vec{b} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$ știind că $\|\vec{e}_1\| = 1$, $\|\vec{e}_2\| = 2$, $\|\vec{e}_3\| = 3$, $\sphericalangle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \sphericalangle(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \frac{\pi}{3}$ și $\sphericalangle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \frac{\pi}{2}$.

Răspuns. $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = -\dfrac{49}{2\sqrt{13}\sqrt{73}}$.

(5). Să se găsească [redacted] proiecțiile $pr_{\vec{b}}\,\vec{a}$ (proiecția vectorului $\vec{a}$ pe direcția vectorului $\vec{b}$) și $pr_{\vec{a}}\,\vec{b}$, dacă:

(6) 1) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$;

2) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$;

3) $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;

4) $\vec{a} = -4\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

<u>Indicație</u>. Se ține cont de faptul că cele două proiecții ortogonale sunt: $pr_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ și $pr_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|}$.

<u>Răspuns</u>. 1) $pr_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $pr_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$;

2) $pr_{\vec{b}}\vec{a} = 0$, $pr_{\vec{a}}\vec{b} = 0$;

3) $pr_{\vec{b}}\vec{a} = \sqrt{3}$, $pr_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{3\sqrt{29}}{29}$

4) $pr_{\vec{b}}\vec{a} = -\frac{10}{3}$, $pr_{\vec{a}}\vec{b} = -\frac{10\sqrt{33}}{33}$.

(7) Să se găsească vectorul $\vec{x}$, coliniar cu vectorul $\vec{a} = (1, 1, -2)$ și îndeplinind condiția $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$.

<u>Indicație</u>. Se ia $\vec{x} = \lambda\vec{a}$. Rezultă $\lambda = \pm\frac{1}{2}$

<u>Răspuns</u>. $\vec{x} = \pm\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \vec{k}\right)$.

(8) Se dau vectorii $\vec{a} = (1, 2, -3)$; $\vec{b} = (5, 1, 2)$ și $\vec{c} = (-3, 0, 1)$. Să se găsească vectorul $\vec{x}$ care îndeplinește condițiile: $\vec{a}\cdot\vec{x} = 4$; $\vec{b}\cdot\vec{x} = 5$; $\vec{c}\cdot\vec{x} = 2$.

<u>Răspuns</u>. $\vec{x} = -\frac{4}{15}\vec{i} + \frac{59}{15}\vec{j} + \frac{6}{5}\vec{k}$.

(9) Se dau vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ cu $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 5$, $(\widehat{a,b}) = \frac{\pi}{3}$. Să se găsească: $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$; $\|(\vec{a}+\vec{b}) \times (\vec{a}-\vec{b})\|$; $\|(3\vec{a}+\vec{b}) \times (\vec{a}-3\vec{b})\|$.

Indicație. Se aplică relația $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

Răspuns. $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \frac{15\sqrt{3}}{2}$; $\|(\vec{a}+\vec{b}) \times (\vec{a}-\vec{b})\| = 15\sqrt{3}$; și $(3a+b) \times (\vec{a} - 3\vec{b}) = 75\sqrt{3}$.

(10) Să se calculeze aria triunghiului construit cu vectorii $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$ și $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ cunoscând că $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 6$ și $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{4}$.

Răspuns. $\mathcal{A} = 72\sqrt{2}$ $\quad \left(\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\vec{p} \times \vec{q}\|\right)$.

(11) Să se găsească $\vec{a} \times \vec{b}$ dacă:

1) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{k}$;
2) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$;
3) $\vec{a} = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$;
4) $\vec{a} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Răspuns.
1) $\vec{a} \times \vec{b} = 6\vec{i} - 3\vec{j}$;
2) $\vec{a} \times \vec{b} = 20\vec{i} - 20\vec{j} - 10\vec{k}$;
3) $\vec{a} \times \vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$;
4) $\vec{a} \times \vec{b} = -20\vec{i} + 20\vec{j} + 10\vec{k}$

(12) Calculați înălțimile paralelogramului ABCD construit pe vectorii $\vec{AB} = 6\vec{i} + 2\vec{k}$ și $\vec{AC} = \frac{3}{2}\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Răspuns. $h_1 = 13\sqrt{10}/20$; $h_2 = 26/\sqrt{29}$.

TEMA NR. 9

(13) Să se găsească vectorul $\vec{x}$ ortogonal pe vectorii $\vec{a}=(2,3,-1)$ și $\vec{b}=(1,-1,3)$ și care îndeplinește condiția $\vec{x}\cdot(2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k})=50$

Răspuns. $\vec{x}=\frac{50}{17}(8\vec{i}-7\vec{j}-5\vec{k})$.

(14) Să se demonstreze identitatea lui Lagrange

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$$

Indicație. Se ține cont de faptul că:

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\left(\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\sin\varphi\right)^2=$$
$$=\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\sin^2\varphi=\vec{a}^2\,\vec{b}^2\sin^2\varphi\ ;$$
$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\left(\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\varphi\right)^2=\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2\cos^2\varphi=\vec{a}^2\vec{b}^2\cos^2\varphi.$$

(15) Se dau punctele $A(1,-1,1)$, $B(1,2,3)$ și $C(0,1,-1)$.

Să se găsească volumul paralelipipedului construit pe $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ca muchii.

Răspuns. $Vol=|(\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC})|=\left|\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&2&3\\0&1&1\end{vmatrix}\right|=|-5|=5.$

(16) Cercetați dacă următoarele triplete de vectori formează baze în V_3 și precizați ce orientare au:

1) $\vec{a}=(1,2,1)$, $\vec{b}=(1,2,-1)$, $\vec{c}=(8,6,4)$;
2) $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(3,1,2)$, $\vec{c}=(2,3,1)$;
3) $\vec{a}=(13,12,11)$, $\vec{b}=(24,23,22)$, $\vec{c}=(35,34,33)$;
4) $\vec{a}=(1,3,5)$, $\vec{b}=(2,4,6)$, $\vec{c}=(8,9,7)$.

Răspuns. 2) și 4) baze la fel orientate ca $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ 1) bază contrar orientată ; 2) nu formează bază.

TEMA NR. 9

pagina 6

(17) Pentru ce valoare a lui $\alpha \in \mathbb{R}$ punctele $A(-1,1,1)$, $B(1,0,2)$, $C(1,1,-1)$ și $D(2,3,\alpha)$ sunt coplanare.

Indicație. Punctele sunt coplanare dacă vectorii $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ sunt liniar dependenți (coplanari), deci produsul lor mixt trebuie să fie zero.

Răspuns. $\alpha = -8$.

(18) Demonstrați că

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0},$$

pentru orice $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ (identitatea lui Jacobi).

Indicație. Se folosește expresia dublului produs vectorial: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$.

(19) Fie $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{OB} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{OC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Calculați volumul tetraedrului $OABC$, precum și lungimea înălțimii din O.

Răspuns. $Vol = \frac{1}{6}$; $S_{ABC} = \frac{1}{2}$; $\vec{OH} = 1$.

(20) Calculați lungimea înălțimii AD a triunghiului ABC de vârfuri $A(1,3,1)$, $B(3,1,5)$, $C(-1,0,2)$.

Răspuns. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \| \vec{AB} \times \vec{AC} \| = 5\sqrt{3}$; $AD = \frac{5\sqrt{78}}{13}$.